ارتقای کارایی شناسایی پارامترهای فیزیکی سازه با استفاده از کاهش تکینگی ماتریس‌های پاسخ در حل معکوس معادلات حرکت★

مجید قاسمی[۱] بابک تقوی[۲] سعید عباس بندی[۳]

چکیده *در این مقاله شناسایی ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم خطی (شامل ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی) بااستفاده از حل معکوس معادلات حرکت، با تمرکز بر کاهش شرایط بدوضعی دستگاه معادلات حاصل، در حوزهٔ فرکانس ارائه گردیده است. این روش با اندازه‌گیری پاسخ‌های شتاب در درجات آزادی سازه تحت یک تحریک اجباری، به شناسایی سیستم و تشخیص خرابی‌های محتمل می‌پردازد. بدوضعی معادلات حرکت و وجود نویز در پاسخ‌های شتاب اندازه‌گیری‌شده به‌عنوان یک مشکل ناگزیر، موجب ناپایداری پاسخ مسئلهٔ تشخیص سیستم، خطای فزاینده و عدم قابلیت اعتماد در ماتریس‌های مشخصهٔ تعیین‌شده می‌شود. دراین مقاله الگوریتمی برای بهبود بخشیدن به مشکل بدوضعی حل معکوس مسئله در روند شناسایی سیستم ارائه گردیده است که یک روش خاص بالامثلثی‌سازی ماتریس است. الگوریتم پیشنهادی با شناسایی بردارهای موازی و شبه‌موازی موجود در ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی به حذف بردارهای وابستهٔ خطی می‌پردازد و با کاهش تکینگی ماتریس، موجب پایدارسازی و ارتقای پاسخ می‌گردد. در تخمین بهینهٔ ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم در روند شناسایی از روش حداقل مربعات و تابع جریمه استفاده شده است. به‌منظور بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی، ماتریس‌های مشخصهٔ قاب هشت طبقهٔ غیربرشی با میرایی نامتناسب با استفاده از الگوریتم کاهش تکینگی در شناسایی سیستم،تعیین شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد استفاده از الگوریتم پیشنهادی در بهبود تخمین و پایداری پاسخ‌ها کاملاً مفید است.*

واژه های کلیدی شناسایی سیستم سازه، حل معکوس معادلهٔ حرکت، مسئلهٔ بدوضع، تکینگی ماتریس.

Efficiency Improvement of the Structural System Identification by Reducing Singularity of the Response Matrixes in Inverse Solution of Equations of Motion

M. Ghasemi B. Taghavi S. Abbasbandy

Abstract *This paper presents a method for identification of linear system physical parameters (structural mass, damping and stiffness matrices) using the inverse solution of equation of motion in the frequency domain, by focus on the reducing the illconditioning effect. The method utilizes the measured responses from the forced vibration test of structure in order to identify the system properties and detect the probable damages. Inputs and outputs data is gathered in an augmented matrix [A|b], that large number of this data is caused to ill condition problem. Moreover, as an inevitable problem, there is a noise in the measurement and makes discrepancy in result of identification. Ill conditioning causes instability in the result of identification, the instability and noisy result reduce validity of the results and accordingly will be valueless statistic methods in the system identification (SI). This paper is presented an algorithm to improve the ill conditioning problem that is a special upper triagularization matrix method. The proposed algorithm can identify parallel and pseudo parallel vectors in coefficient matrix of linear equations. By removing these linearly dependent vectors and thus reducing singularity of the matrix, stabilization is resulted which is a key objective in numerical linear algebra. In order to optimal estimation of identification results, least-squares and penalty function methods is used. The validity and efficiency of the reduce singularity of matrix method is tested on a eight non shear story frame structure by using direct model updating method. Aforementioned structures have a non-proportional damped matrix and subjected to sweep harmonic forces. The results show that the proposed algorithm improves the stability of the estimation and the answer is quite useful.*

Key words System Identification, Inverse Problem in Equation of Motion, Ill-Condition Problem, Singularity of Matrix.

★ تاریخ دریافت مقاله ۹۳/٤/۳۱ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/٤/۲٤ می‌باشد.

(۱) استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکدهٔ عمران و نقشه‌برداری، گروه عمران، قزوین.

(۲) نویسنده مسئول: دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، دانشکدهٔ عمران و نقشه‌برداری، گروه عمران، قزوین.
b.taqavi@gmail.com

(۳) استاد، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی، قزوین.

مقدمه

امروزه آزمایش غیرمخرب سازه‌ها (NDT) با هدف شناسایی سیستم، تشخیص خرابی و پایش سلامت سازه در بسیاری از سازه‌های مهم مورد استفاده قرار می‌گیرد [1]. این روش‌ها عموماً بر پایهٔ الگوریتم‌های شناسایی سیستم استوار هستند و در آنها به‌کمک اندازه‌گیری‌های میدانی، ساختار و پارامترهای مدل دینامیکی شناسایی می‌شوند. روند شناسایی سیستم مبتنی بر حل معکوس معادلات حرکت است که در آن پارامترهای سیستم به‌کمک اندازه‌گیری سیگنال‌های ورودی و خروجی آمیخته با نویز تعیین می‌گردد.

به‌طور کلی مسائل معکوس را می‌توان جزء بارزترین مسائل فیزیکی دانست که به لحاظ ریاضی بدوضع هستند مسائلی مانند مسائل معکوس پراکنش در تعیین شکل اشیا بااستفاده از اندازه‌گیری شدت و فاز امواج پراکنده‌شده به‌وسیلهٔ شیء، تصویربرداری به‌روش توموگرافی در مبحث پزشکی، مسائل معکوس استیفان برای مدل‌سازی ذوب یخچال‌های قطبی، نمونه‌هایی از مسائل فیزیکی بدوضع هستند که مبتنی بر حل معکوس می‌باشند [2].

در حل عددی دستگاه‌های معادلات، بنابر وضعیت جواب مسئله یعنی وجود، یکتایی و یا وضعیت پایداری جواب، روش‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عبارت دیگر تا زمانی که سه شرط (۱) وجود، (۲) یکتایی، (۳) پایداری جواب تأمین باشند روش‌های معمول حل دستگاه‌های معادلات می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، اما در صورت عدم برقراری هر یک از شروط یاد شده، با یک مسئلهٔ بدوضع روبه‌رو خواهیم بود که حل آن نیازمند تمهیدات ویژه است. در اوایل قرن ۱۹، هادامارد (Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)) اولین کسی بود که بحث دستگاه‌های معادلات خوش‌وضع و بدوضع را مطرح نمود. وی دستگاه‌های معادلاتی را که در آنها سه شرط یاد شده برقرارند را مسائل «خوش‌وضع (well condition problem)» و مسائلی را که در آنها یکی از سه شرط نقض گردیده باشد، مسائل «بدوضع(ill condition problem)» نام‌گذاری کرد. البته هادامارد بر این عقیده بود که مسائل بدوضع تنها جنبهٔ تصنعی دارند و نمی‌توانند در حل مسائل فیزیکی موضوعیت یابند[2]. به‌طور کلی مسائل بدوضع به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند، مسائل دارای «نقص رتبه» که در آنها ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دارای تعدادی مقادیر تکین کوچک است به‌طوری که مقدار آنها بسیار کوچک‌تر از سایر مقادیر تکین این ماتریس است. نوع دیگر از مسائل بدوضع مربوط به حالتی است که رتبه و مرتبهٔ عددی ماتریس ضرایب دستگاه معادلات پر است، اما باز هم تفاوت آشکاری بین مقادیر تکین کوچک و بزرگ این ماتریس وجود دارد که این حالت تحت عنوان «مسائل بدحالت (Ill posed problem)» شناخته می‌شود [3]. بر این اساس رامپ (S.M. Rump) [4,5] روشی برای معکوس کردن ماتریس بدوضع با عدد وضعیت دل‌خواه ابداع نمود. ویژگی روش او این بود که محاسبات با دقت دلخواه فقط در بخشی از کل فرآیند حل مورد نیاز بود. کارایی روش رامپ در مقالات دیگر [6-8] نیز بررسی شد. اوهتا و همکاران (T. Ohta et al) [9] روش رامپ را با کمی تغییرات در تعداد ارقام با معنی محاسباتی بررسی کردند. تعداد زیادی از روش‌های پیشنهادشده برای حل دستگاه‌های بدوضع به لحاظ تعداد فرآیند تکراری مورد نیاز برای هم‌گرایی، مقرون‌به‌صرفه نیستند (پرهزینه هستند) اگرچه برخی از آنها مانند روش مورینسکی (K. Moszynski) [10] و استراند (O.Strand) [11] از دقت مناسبی نیز برخوردارند. روش دیگری که برای کاهش مشکل بدوضعی پیشنهاد شده است الگوریتمی موازی برای تبدیل هاوسهولدر است که توسط لو و همکاران (M. Lu et al) [12] توسعه داده شده است. استفاده از تجزیه مقادیر تکین(SVD) در حل دستگاه معادلات بدوضع نیز طی

یک روند طولانی توسط چند ریاضیدان برجسته توسعه یافته است. در این روش ابتدا ماتریس ضرایب دستگاه معادلات به بردارهای ویژه و مقادیر ویژهٔ خود تجزیه می‌گردند سپس معادلات به‌دست آمده برای حل دستگاه مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگرچه SVD به‌عنوان مهم‌ترین روش پایدارساز مسائل بدوضع شناخته می‌شود، با این حال دارای اشکالاتی نیز می‌باشد مانند از دست دادن برخی اطلاعات مفید در همان گام اول این روش (به‌دست آوردن مقادیر تکین ماتریس). برای حل این مشکل محققان روش‌های بسیاری ارائه نموده‌اند که از آن جمله می‌توان به الگوریتم دوقطری‌ساز گولاب و کاهان (G.H Golub and Kahan) [13]، الگوریتم بوزینگر و گولاب (P.A Businger and G.H Golub) [14]، الگوریتم گولاب _ کاهان_رینسک (G.H Golub and C.Reinsch) [15] اشاره نمود. الگوریتم‌های دیگری نیز بر پایهٔ روش‌های ذکرشده توسط تی چان (T.F Chan) (SVD–چان) [16]، دمل وکاهان (J Demmel and W. Kahan) [17] و فرناندو و پارلت (K.V Fernando and B.N Parlet) (الگوریتمdpds) [18] ارائه گردید. هم‌چنین کاربرد SVD در حل برخی دستگاه‌هایی که دارای مقادیر ویژهٔ بسیار کوچک هستند دچار مشکل می‌شود، برای حل این مشکل هنسن (G Hansen) [19] و واراه (J.M Varah) [20,21] روش تجزیهٔ ناقص مقادیر تکین (TSVD) را پیشنهاد نمودند. با توجه به اهمیت محل قطع در روش تجزیه ناقص مقادیر تکین کوشش‌های زیادی برای پیشنهاد محل قطع بهینه انجام شده است. نمونه‌ای از این روش‌ها که کاربردهای زیادی نیز دارند روش L-curve و روش cross-validation است که هردو توسط هنسن [22,23] توسعه یافته‌اند. ولوخ و ویلنی (K.Y Volokh and O Vilnay) [24] نقطهٔ قطع بهینه را برمبنای تصویر کردن مقادیر ویژهٔ بسیار کوچک به فضای خالی ماتریس بردارهای ویژه محاسبه نمودند آنها نام روش خود را بهبودیافتهٔ تجزیه ناقص مقادیر تکین (ITSVD) نامیدند. یکی دیگر از معمول‌ترین روش‌های حل مسائل بدوضع که یک روش منظم‌ساز شناخته می‌شود توسط تیخونوف (A.N Tikhonov) [25] ارائه گردید این روش خصوصاً در حل مسائل معکوس کاربرد گسترده‌ای دارد و در آن به‌منظور پایدارسازی مسئله اطلاعاتی در خصوص جواب مسئله به آن اضافه می‌گردد.

درخصوص استفاده از الگوریتم‌های پایدارساز مطرح‌شده در مسائل شناسایی سیستم سازه‌ای نیز تحقیقات فراوانی صورت گرفته است. لسلر و همکاران (Q Leclere et al)[26] شناسایی نیروهای موجود بر روی سازه را از طریق اندازه‌گیری‌های شتاب بررسی کردند، آنها در روند شناسایی روش خود از تجزیه ناقص مقادیر تکین با نقطه‌قطع تعیین‌شده در روش L-curve استفاده نمودند. در ادامه نردبرگ و گوستافسون (I Gustafsson) [27] در روند این شناسایی از منظم‌سازی تیخونوف استفاده کردند. دیکن و همکاران (V Dicken et al)[28] از روش منظم‌سازی تیخونوف برای شناسایی بردارهای ثابت دینامیکی در سازه‌های با میرایی غیرخطی استفاده نمودند. یو و همکارانش (E Yu et al) [29] با این ایده که حل مشکل بدوضعی و نقص رتبه مهم‌ترین مسئله در روند شناسایی پارامترهاست روشی منظم‌ساز برای به‌روز نمودن مدل سازه ارائه نمودند که در آن مشکلات عددی ذکرشده در فرآیند بهینه‌سازی کاهش یافته بود. روش آنها براساس حداقل مربعات متغیرهای محدود BVLS (Bounded Variables Least –Square) بود و در آن بر روی راهکارهای ریاضی حل عددی مسئله بهینه‌سازی تمرکز شده بود. آنها روش را بر روی یک سازه با ورودی و خروجی مشخص اعمال نمودند و در آن تابع پاسخ فرکانسی را به‌عنوان داده‌های مسئله انتخاب گردند. آنان نشان دادند روش ارائه‌شده دارای سرعت هم‌گرایی بالاتر و دقت قابل قبول بوده است. تیتیوروس و فریسول (B Titurus and M.I Friswell)

[30] روشی را برای به‌روز نمودن مدل مبتنی بر حساسیت ارائه نمودند که در آن روش بهینه‌سازی براساس تجزیه مقادیر تکین بود. آنها بیشتر در مورد حل مسئله بهینه‌سازی و روش‌های متفاوت آن تحقیق نمودند. آنها برای محاسبهٔ مقدار بهینه، منحنی‌های مختلفی را به‌کار بردند و نحوهٔ هم‌گرایی محاسبات را در این توابع بررسی کردند. در انتها روش بر روی مدل‌های عددی اعمال شد و صحت آن مورد تأیید قرار گرفت.

در این مقاله یک الگوریتم جدید تحت عنوان «کاهش تکینگی ماتریس» برای حل مشکل بد وضعی مسئله شناسایی سیستم سازه‌ای ارائه گردیده است که از تکنیک‌های جبر خطی بهره می‌گیرد. روش شناسایی مورد استفاده در این مقاله با استفادهٔ مستقیم از معادلات حرکت و به‌کارگیری بهینه‌ساز تابع جریمه به شناسایی پارامترهای سیستم در حوزهٔ فرکانس می‌پردازد. باید توجه داشت در عمل یک هم‌پوشانی بین روش‌های پایدارسازی و مسئله بهینه‌سازی وجود دارد [۳۰]. الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله ضمن کاهش تکینگی‌های ماتریس ضرایب باعث تأثیر بهتر بهینه‌ساز تابع جریمه می‌شود که به شکل یک پیش‌شرط‌ساز در فرم دستگاه معادلات جبری نمایان گردیده است. در این تحقیق سعی گردیده است با کاهش تکینگی ماتریس، ضمن کاهش عدد وضعیت ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دقت و پایداری پاسخ مسئلهٔ شناسایی افزایش یابد. کارایی و قابلیت الگوریتم مذکور بر روی دو سیستم سازه‌ای با تعداد طبقات متفاوت و بارگذاری‌های مختلف (هارمونیک (Harmonic load)، تصادفی (Random load) و PRBS (Psuedo Random Binary Sequence load)) بررسی گردیده است. در این‌جا این نتایج برای یکی از این سازه‌ها که یک سازهٔ هشت‌طبقه با میرایی غیرمتناسب است ارائه گردیده است.

روش مستقیم شناسایی سیستم در حوزهٔ فرکانس و استفاده از ایدهٔ کاهش تکینگی ماتریس

در روش مستقیم شناسایی، معادلهٔ تعادل حرکت سازهٔ خطی با n درجه آزادی و فرض میرایی ویسکوز و با درنظر گرفتن همهٔ درجات آزادی سازه و گام‌های زمانی اندازه‌گیری شده (m گام زمانی) منجر به $n \times m$ معادله خواهد شد. با جداسازی ماتریس‌های خصوصیات سیستم و پاسخ‌های سازه به‌عنوان مجهولات و معلومات شناسایی سیستم، فرم بلوکی رابطهٔ (۱) را خواهیم داشت .

$$[M_{n\times n} \quad C_{n\times n} \quad K_{n\times n}]\begin{bmatrix}\ddot{U}_{n\times m}\\ \dot{U}_{n\times m}\\ U_{n\times m}\end{bmatrix} = F_{n\times m} \qquad (۱)$$

با تبدیل فوریه طرفین معادله و بیان پاسخ‌ها و نیروی ورودی در حوزهٔ فرکانس معادله قابل بازنویسی است:

$$[M_{n\times n} \quad C_{n\times n} \quad K_{n\times n}]\begin{bmatrix}\ddot{U}(\omega)_{n\times m}\\ \dot{U}(\omega)_{n\times m}\\ U(\omega)_{n\times m}\end{bmatrix} = F(\omega)_{n\times m} \qquad (۲)$$

که $\ddot{U}(\omega)$، $\dot{U}(\omega)$، $U(\omega)$ و $F(\omega)$ به‌ترتیب پاسخ‌های شتاب، سرعت، جابه‌جایی و نیروی ورودی در حوزهٔ فرکانس بوده و همگی مقادیر مختلط می‌باشند. در صورتی‌که مقادیر پاسخ‌ها در حوزهٔ زمان نویزدار باشند، مقادیر پاسخ‌های فرکانسی نیز نویزدار خواهند بود، ولی در موارد عملی معمولاً توزیع نویزها در همهٔ ناحیه‌های فرکانسی یکسان نیست و میزان نسبت نویز به پاسخ فرکانسی در مقادیر فرکانس‌های خیلی کم و زیاد و هم‌چنین در فرکانس‌های آنتی‌رزنانس‌ها بیشتر از سایر نواحی خواهد بود. در این مقاله به‌منظور اجتناب از وابستگی روش نسبت به نحوهٔ توزیع نویز در محیط فرکانس، نویزها در حوزه زمان با توزیع نرمال ایجاد شده و به پاسخ‌ها اضافه شده‌اند و سپس پاسخ‌های نویزدار با تبدیل فوریه به پاسخ‌های

فرکانسی تبدیل شده‌اند.

با معرفی ماتریس $R_{\omega_{m\times 3n}} = [\ddot{U}^T_{\omega_{m\times n}} \quad \dot{U}^T_{\omega_{m\times n}} \quad U^T_{\omega_{m\times n}}]$ به‌عنوان ماتریس پاسخ فرکانسی و $Q_{3n\times n} = [M_{n\times n} \quad C_{n\times n} \quad K_{n\times n}]^T$ به‌عنوان ماتریس مشخصات مکانیکی سیستم، معادلات حرکت به‌صورت زیر نوشته می‌شود که پاسخ آن جواب مسئلهٔ شناسایی می‌باشد:

$$R_{m\times 3n}\, Q_{3n\times n} = F^T_{m\times n} \qquad (۳)$$

در معادلهٔ جبری فوق ماتریس R یک ماتریس فرامعین با عدد وضعیت بسیار بالاست، بنابراین درصورتی‌که پاسخ سازه به نویز آغشته باشد، جواب‌های محاسبه‌شده برای Q با استفاده از رابطهٔ (٤) منجر به خطای بسیار زیادی خواهد شد. دراین‌صورت ماتریس نیروی ماندگار سازه در محیط فرکانس، E_ω، در n درجه آزادی سازه و m گام زمانی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$E_{\omega_{m\times 3n}} = R_{\omega_{m\times 3n}} Q_{3n\times n} - F^T_{\omega_{m\times 3n}} \qquad (٤)$$

باتوجه به مختلط بودن مقادیر E_ω، در حل معادلات می‌توان از کمینه بودن مقادیر حقیقی و یا مقادیر قسمت موهومی E_ω، به‌صورت جداگانه استفاده نمود.

$$E_{R_{m\times n}} = R_{R_{m\times 3n}} Q_{R_{3n\times n}} - F^T_{R_{m\times n}} \qquad (\text{٥-الف})$$

$$E_{I_{m\times n}} = R_{I_{m\times 3n}} Q_{I_{3n\times n}} - F^T_{I_{m\times n}} \qquad (\text{٥-ب})$$

که Q_R و Q_I قسمت‌های حقیقی و موهومی ماتریس‌های پاسخ و F_R و F_I قسمت‌های حقیقی و موهومی ماتریس‌های نیروی ورودی در حوزهٔ فرکانس هستند. غفوری آشتیانی و قاسمی [31] ثابت کردند می‌توان تخمین ماتریس Q_R را به‌عنوان تخمین درستی از ماتریس Q در روند شناسایی سیستم درنظر گرفت.

در این روش بهینه‌ترین خصوصیات سازه به‌گونه‌ای انتخاب می‌گردد که مجموع مربعات نیروهای ماندگار در همهٔ درجات آزادی و در همهٔ گام‌های زمانی منتخب کمینه گردد. در حالت بهینه‌سازی نامقید، جواب بهینه‌سازی به شرح زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial {E_R}^2}{\partial Q_{ij}} = 0 \Rightarrow R_R^T R_R Q = R_R^T F_R^T \qquad (٦)$$

در حالتی که قیدهای تقارن ماتریس‌های میرایی و سختی و قطری بودن ماتریس جرم اعمال گردند، می‌توان از روش‌هایی مانند روش تابع جریمه در روند بهینه‌سازی استفاده نمود. در این حالت قیدهای مزبور به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} Q_{ij} = Q_{ji} = 0 & \text{for } \; i \le n \text{ and } i \ne j \\ Q_{ij} = Q_{j+n,i-n,} & \text{for } \; n+1 \le i \le 2n \\ Q_{ij} = Q_{j+2n,i-2n,} & \text{for } \; 2n+1 \le i \le 3n \end{cases} \qquad (٧)$$

در این حالت تابع هدف بهینه‌سازی به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$f = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_{kj}^2 + R_p\left(\sum_{i=j=1}^{n} Q_{ij}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n}(Q_{ij} - Q_{j-n,i+n})^2 + \sum_{i=2n+1}^{3n}(Q_{ij} - Q_{j-2n,i+2n})^2\right) \qquad (٨)$$

در رابطهٔ فوق R_P به‌عنوان ضریب تابع جریمه بیانگر حد بزرگی تابع جریمه می‌باشد و مقدار آن براساس تابع هدف تعیین می‌گردد. انتخاب مقادیر کوچک برای R_P باعث تأثیر اندک قیدها در روند بهینه‌سازی می‌گردد، از طرف دیگر انتخاب مقادیر بسیار بزرگ برای آن باعث اختلال در روند بهینه سازی خواهد شد. بنابراین در این مقاله مقدار R_P برابر با مقدار حداکثر E_{kj}^2 در تابع هدف درنظر گرفته شده است که با ایجاد خطا در برقراری قیدها، مقدار جریمه‌ای با مقیاس تابع هدف اولیه به تابع جریمه افزوده گردد.

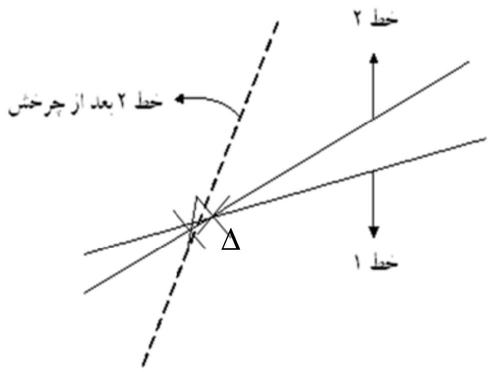
درنهایت در حالت بهینه‌سازی مقید جـواب بهینـهٔ تابع هدف با فرآیند مشتق‌گیری $\frac{\partial f}{\partial Q_{ij}} = 0$ قابل تعیـین است.

$$\frac{\partial f}{\partial Q_{ij}} = 0 \Rightarrow pR_R Q = pF_R^T \quad (۹)$$

در رابطهٔ (۹) تابع جریمه به فرم پیش‌شرط‌سـاز p در معادلهٔ جبری (٤) نمایان شده است.

الگوریتم کاهش تکینگی ماتریس (Reducing singularity of matrix (RSM))

ایدهٔ اصلی این مقاله بر پایهٔ کاهش تکینگی ماتریس R^T استوار است که در آن از نوع خاصی از بالامثلثی‌سـازی استفاده شده است. الگوریتم ارائـه‌شـده قـادر اسـت بـا شناسایی ستون‌هـای وابسـتهٔ عـددی و وابسـتهٔ خطـی ماتریس R^T، این ستون‌هـا را از مـاتریس حـذف کنـد. درحقیقت هر بردار ستونی در دستگاه معـادلات خطـی (٤) یک معادله است که در سطری از ماتریس R قـرار دارد، در روند حل ایـن دسـتگاه تعـداد ایـن معـادلات بسیار زیاد است بنابراین بهینه‌ساز تابع جریمه به معادله اضـافه شـده اسـت. تعبیـر جبرخطـی اسـتفاده از تـابع جریمه به فرم یک پیش‌شرط‌ساز در معادلهٔ (۹) مشاهده می‌گـردد. از نگـاه جبـر خطـی عـددی عملکـرد یـک پیش‌شرط‌ساز در دستگاه معادلات خطی دوران ماتریس ضرایب است، به‌طور مثال در فرم دومعادله دومجهـول (مطابق شکل ۱)، ایـن عملکـرد بـه تبیـین نقطـهٔ قطـع می‌پردازد که موجب پایدار شـدن پاسـخ خواهـد شـد، البته در طی ایـن رونـد خطـای نـاگریز (Δ) بـه‌وجـود خواهـد آمـد. در روش پیشـنهادی ایـن مقالـه سـعی می‌گردد با استفاده از کاهش تکنیکی مـاتریس ضـرایب تعداد معادلات (معادلات تکراری یـا وابسـته) کـاهش یابد. این روش به‌لحاظ مبانی ریاضـی دارای دو مزیـت عمده است: ۱) در روند اعمال پیش‌شـرط‌سـاز معادلـهٔ (۹) قبـل از ایـن‌کـه پـیش‌شـرط‌سـاز بـا اعمـال دوران بردارهای موازی (و تقریباً موازی) از بدوضـعی مسـئله بکاهد و پاسخ را پایدار کنـد، بـا کـاهش ایـن بردارهـا (تکینگی‌ها)، خطای حاصل از این چـرخش (Δ) کمتـر شود. در نتیجه خطای کمتری در نتایج مجهـولات (Q) بـه‌وجـود خواهـد آمـد. ۲) کـاهش تعـداد بردارهـای موازی و شبه‌موازی موجب کاهش وابسته‌هـای عـددی و خطـی مـاتریس ضـرایب و درنتیجـه کـاهش عـدد وضعیت آن و پایداری بیشـتر پاسـخ در حضـور نـویز خواهد شد.



شکل ۱ نحوهٔ عملکرد پیش‌شرط‌ساز در یک دستگاه دو معادله دو مجهول که با چرخش یکی از بردارهای شبه‌موازی همراه است

لازم به توضیح است روند پیـاده‌سـازی الگـوریتم کاهش تکینگی در ماتریس بلوکی R^T به‌صورتی بـوده است که در ابتدا این الگوریتم روی مـاتریس شـتاب $\ddot{X}$ لحاظ شده است و بعد از شناسایی ستون‌های وابسته از ماتریس شتاب حذف گردیده‌اند. در ادامـه بـه‌صـورت متناظر این ستون‌ها از ماتریس‌های سرعت و جابه‌جایی و هـم‌چنـین مـاتریس نیـروی ورودی(F) نیـز حـذف گردیده‌اند.

لم: اگر A ماتریس مربعی (n×n) باشـد و مـاتریس B بالامثلثی شدهٔ ماتریس A با استفاده از روش زیر باشـد آن‌گاه:

سطر i ام ماتریس A ، $(1 \le i \le n)$ وابستهٔ خطی است اگر همهٔ درایه‌های سطر i ام ماتریس B صفر باشد.

روش بالامثلثی‌سازی

از سه عمل سطری مقدماتی $(1.e_{(p,q)}, 2.e_{\lambda(p)}, 3.e_{(p)+\lambda(q)})$ (در اینجا e یک عملگر مقدماتی (سطری مقدماتی) است، p و q دو سطر از فهرست موجود هستند. و $\boldsymbol{\lambda}$ یک اسکالر می‌باشد) فقط عمل دوم و سوم استفاده گردد. (جابه‌جایی سطر و یا ستون در ماتریس A نداشته باشیم). $(\lambda \in \mathbb{N})$

۱) $A_{i,i}$ $(1 \le i \le n)$ به‌عنوان عنصر محورگیری انتخاب شود و قبل از اجرای اعمال سطری مقدماتی در صورت امکان ناصفر گردد.

۲) در روند اجرای الگوریتم هرکجا $A_{i,i}$ برابر صفر شد، محورگیری از $A_{i+1,i+1}$ ادامه یابد. $(i+1 \le n)$

اثبات: فرض کنید اسکالرهای غیرصفر، $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_t)$ وجود داشته باشد و سطرهای A نیز به‌صورت A_1, A_2 , ... , $A_t, A_i, \dots, A_n$ مشخص شده باشند (t=i-1). آن‌گاه اگر $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_t A_t + A_i = 0$ باشد، سطر i ام ماتریس A وابستهٔ خطی (به سطرهای ماقبل خود) خواهد بود.

به‌منظور استفاده از الگوریتم فوق در حل معادلهٔ (۹) دو نکتهٔ مهم بایستی مد نظر قرار گیرد، اول این‌که ماتریس R ماتریسی $m \times n$ $(m >> n)$ است که برای استفاده از قضیهٔ فوق باید تبدیل به زیرماتریس‌های n×n گردد. دوم این‌که حالتی که در الگوریتم فوق به‌صورت $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_t A_t + A_i = 0$ برای وابستگی سطر i ام ماتریس A درنظر گرفته شد، در صورتی است که ماتریس A دارای «نقص رتبه» باشد، به‌عبارتی سطرها و یا ستون‌هایی در ماتریس A هستند که به سایر سطر ها و ستون های ماتریس A وابستگی خطی دارند. باید توجه داشت اکثر مسائل فیزیکی بدوضع که مبتنی بر جمع‌آوری اطلاعات میدانی هستند از نوع مسائل «بدحالت» می‌باشند، بنابراین در این‌جا رابطهٔ $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_t A_t + A_i = \varepsilon$ به‌جای رابطهٔ قبل مقیاس بدوضعی خواهد بود، درواقع در این حالت به‌جای وابستگی خطی بردارهای سطری و ستونی A، وابستگی عددی آنها مد نظر قرار می‌گیرد؛ بنابراین به‌جای استفاده از عدد صفر در تشخیص وابستگی در الگوریتم ذکر شده بایستی یک عدد نزدیک به صفر اختیار گردد.

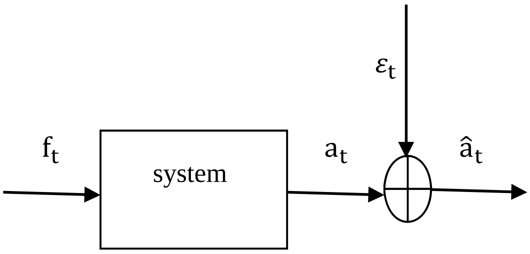
بررسی نتایج شناسایی بر روی سازهٔ هشت طبقه

نتایج شناسایی به‌کمک روش ارائه‌شده بر روی سازه‌های سه و هشت طبقه و تغییر بارگذاری در طبقات، با هم مقایسه شده‌اند. این نتایج نشان می‌دهد هر چه درجات آزادی سازه بیشتر باشد، باتوجه به این‌که ماتریس نگاشت (R) دارای عدد وضعیت بزرگ‌تری خواهد شد تأثیر استفاده از کاهش تکینگی ماتریس در بهبود نتایج بیشتر خواهد بود. این موضوع توسط سه نوع بارگذاری هارمونیک، تصادفی و PRBS با حالت‌های متفاوت از لحاظ محل اعمال بار، بر روی دو سازهٔ سه و هشت طبقه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در این مقاله تنها یکی از حالات فوق به‌منظور مقایسه با نتایج غفوری آشتیانی و قاسمی [31] آورده شده است.

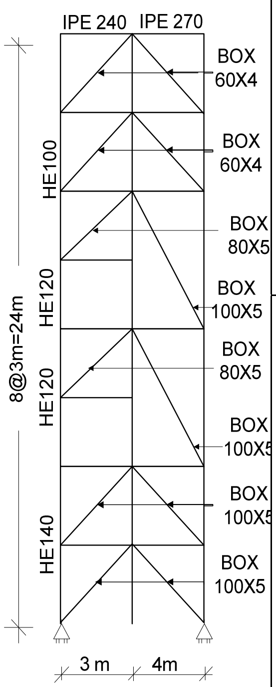
تشریح سازه، نحوهٔ بارگذاری و مدل‌سازی سیستم. سازهٔ مورد نظر یک قاب دوبعدی هشت طبقهٔ غیربرشی با میرایی نامتناسب می‌باشد. با فرض صلب بودن سقف‌ها، درجات آزادی سازه و جرم طبقات در تراز تیرها متمرکز شده اند و این درجات آزادی به‌صورت افقی مستقل تعریف گردیده‌اند. ماتریس سختی سازه با استفاده از مدل اجزای محدود و ماتریس میرایی سیستم، با

جایگزینی ماتریس سختی سازه با هندسهٔ مشابه ولی اعضای متفاوت محاسبه شده است. خصوصیات سازه در (شکل ۲) آورده شده است.

با توجه به فرکانس‌های سازه به‌عنوان نیروی ورودی به سیستم، بار هارمونیک جارویی (با فرکانس‌های متغیر ۱ تا ۱۰ هرتز) در طبقهٔ اول لحاظ شده و بر طبق آن پاسخ شتاب سازه به‌دست آمده است. به‌جهت مدل‌سازی نویز نیز مطابق شکل (۳)، $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ به‌شکل یک نویز سفید با توزیع نرمال و مقدار میانگین صفر که میزان آن براساس نسبت مقدار جذر مربعات سیگنال نویز به‌مقدار میانگین جذر مربعات پاسخ در درجات آزادی پاسخ می‌باشد به پاسخ‌ها و نیروی ورودی صحیح افزوده شده است.



شکل ۳ ایجاد نویز در سیستم

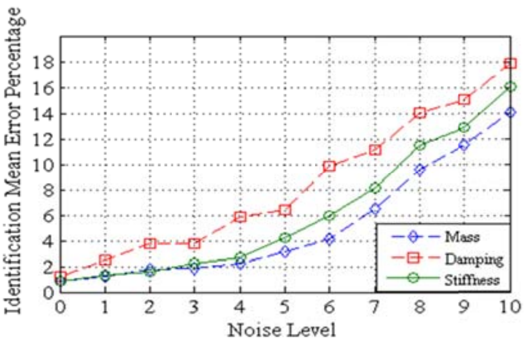


طبقه	1	2	3	4	5	6	7	8
جرم (ton)	70	55	40	55	40	60	60	55
ماتریس میرایی (KN.sec/mm) $\times 10^{-2}$	4.81	-3.59	0.05	0.01	0.00	-0.01	0.01	0.07
	-3.59	4.92	-1.08	-0.33	0.01	0.01	0.00	0.00
	0.05	-1.08	2.11	-1.14	0.06	0.00	0.00	0.03
	0.01	-0.33	-1.14	2.82	-1.06	-0.36	0.00	0.07
	0.00	0.01	0.06	-1.06	2.03	-1.10	0.03	0.04
	-0.01	0.01	0.00	-0.36	-1.10	3.47	-2.23	0.21
	0.01	0.00	0.00	0.00	0.03	-2.23	4.25	-2.06
	0.07	0.00	0.03	0.07	0.04	0.21	-2.06	1.65
ماتریس سختی (KN/mm)	16.61	-9.53	-0.16	0.31	-0.16	0.16	0.01	0.14
	-9.53	10.94	0.36	-2.02	0.21	-0.06	-0.01	-0.04
	-0.16	0.36	2.74	-2.89	-0.42	0.23	0.03	0.19
	0.31	-2.02	-2.89	5.93	0.51	-1.81	-0.03	-0.03
	-0.16	0.21	-0.42	0.51	2.46	-3.1	0.11	0.41
	0.16	-0.06	0.23	-1.81	-3.1	8.99	-4.50	0.10
	0.01	-0.01	0.03	-0.03	0.11	-4.50	8.51	-4.12
	0.14	-0.04	0.19	-0.03	0.41	0.10	-4.12	3.35
Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
فرکانس سازه (HZ)	0.607	2.027	2.815	3.919	5.509	6.379	7.895	9.662

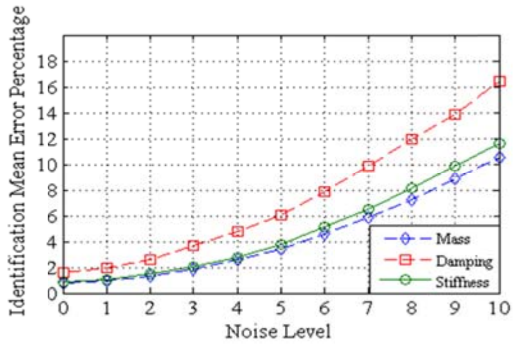
شکل ۲ سازه نمونه و خصوصیات آن

نتایج شناسایی

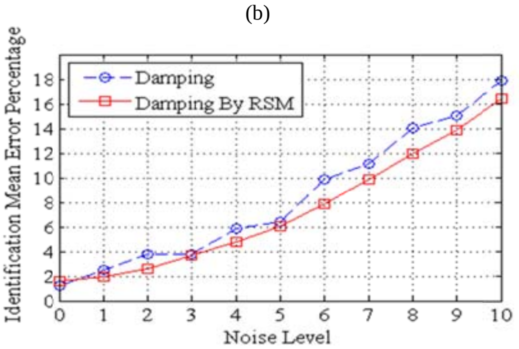
حساسیت شناسایی سیستم در دوحالت استفاده و عدم استفاده از الگوریتم کاهش تکینگی ماتریس در تعیین خصوصیات سیستم با استفاده از شبه‌پاسخ‌های سرعت و جابه‌جایی به‌میزان نویز (۱ تا ۱۰ درصد) در پاسخ شتاب و نیروی ورودی در شکل (٤) مقایسه شده‌اند. خطای نشان داده‌شده در این شکل، براساس میانگین خطای درایه‌های قطری ماتریس‌های تعیین‌شدهٔ سازه در ۱۰۰ نمونه‌سازی به‌روش مونت کارلو محاسبه شده‌اند که نتایج نشان می‌دهد برتری نسبی از نظر مقدار خطا با روشی است که از کاهش تکینگی استفاده می‌کند که این برتری با افزایش سطح نویز نمایان‌تر می‌گردد. بنابراین کاهش خطای Δ در اثر پیش‌شرط‌ساز تابع جریمه که به‌عنوان یک ایده و هدف مطرح شده بود در عمل مشاهده می‌گردد. دلیل این‌که چرا بهبود نتایج با افزایش سطح نویز بیشتر می‌شود نیز به خصوصیات شناسایی سیستم در حوزهٔ فرکانس برمی‌گردد، در واقع شناسایی سیستم در حوزهٔ فرکانس در یک بازهٔ خاص (بازهٔ مفید فرکانسی) صورت می‌گیرد. با افزایش سطح نویز یک سری داده نامفید به این بازه وارد می‌شود که در ماتریس ضرایب به‌شکل بردار نمود پیدا می‌کند، این بردارها با بردارهای موجود در ماتریس ضرایب متشابهند و موجب ناپایداری پاسخ و افزایش خطای Δ می‌گردند، درنتیجه با حذف آنها به‌کمک روش کاهش تکینگی ماتریس بهبود نتایج به‌دست خواهد آمد. لازم به ذکر است داده‌های نامفید ذکرشده در سطح نویز پایین قادر به ورود به بازهٔ مفید فرکانسی نیستند.

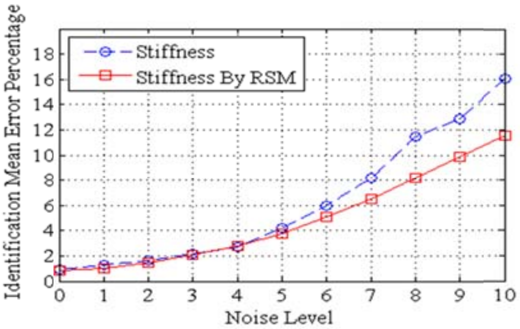


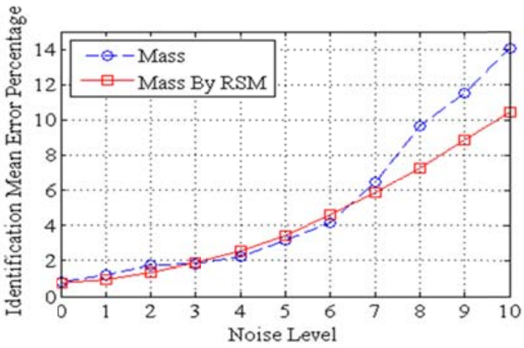
(a)



(b)







شکل ٤ مقایسهٔ نتایج شناسایی عناصر قطری ماتریس‌های خصوصیات سیستم براساس تغییرات میزان نویز در پاسخ‌ها و نیروی در حالت بارگذاری هارمونیک جارویی ۱ تا ۱۰ هرتز بر روی طبقهٔ اول از سازهٔ هشت طبقه در دو حالت: (a) بدون استفاده از کاهش تکینگی ماتریس، (b) با استفاده از کاهش تکینگی ماتریس(RSM)، (در سه شکل دیگر نیز مقایسهٔ نظیربه‌نظیر ماتریس‌های خصوصیات سیستم در دو روش نشان داده شده است)

هدف دیگری که در این ارائه مورد توجه قرار گرفته است کاهش ناپایداری پاسخ می‌باشد. در یک مسئلهٔ پایدار افزایش نسبی سطح نویز و نتایج حاصل رابطهٔ منظمی با یکدیگر دارند. همان‌طور که در شکل (٤) ملاحظه می‌گردد نحوهٔ افزایش خطاهای خصوصیات تعیین شده در اثر افزایش میزان نویز در حالتی که از کاهش تکینگی ماتریس استفاده شده باشد رفتار منظم‌تری نسبت به حالت غیر آن دارد که نشان می‌دهد با کاهش تکینگی‌ها می‌توان به پایدارسازی پاسخ (کاهش اثر بدوضعی در پاسخ مسئله) رسید.

بررسی آماری دقت و قابلیت درایه‌های ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم

همان‌طور که در شکل (٤) مشاهده گردید نتایج شناسایی برای عناصر قطری ماتریس‌های مشخصهٔ سازه، در هر دو حالت استفاده و عدم استفاده از کاهش تکینگی ماتریس، تا سطح نویز ۵٪ تقریباً برابر بوده‌است و از این میزان نویز به بعد به‌تدریج کارایی روش کاهش تکینگی ماتریس در کاهش خطای پاسخ نمایان می‌گردد. در این قسمت برای اطمینان از قابلیت روش پیشنهادی نتایج آماری ۱۰۰۰ بار شناسایی، برای کلیهٔ درایه‌های ماتریس‌های مشخصهٔ سازه، با نمونه‌سازی مونت کارلو مربوط به سطح نویز ۳٪ (که نتایج شناسایی نزدیک به هم دارند) بررسی گردیده و در جداول (۱) و (۲) آورده شده است. بدین منظور دو معیار آماری متوسط خطا و ضریب تغییرات برای بررسی کاهش خطا و پایدارسازی پاسخ برای کلیهٔ درایه‌های ماتریس مشخصات سیستم سازه‌ای در دو حالت استفاده و عدم استفاده از کاهش تکینگی ماتریس محاسبه و با هم مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد درصد خطای عناصر قطری ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی در هر دو حالت تقریباً یکسان، و برای عناصر غیر قطری برتری نسبی با روشی است که از کاهش تکینگی ماتریس استفاده می‌کند، بنابراین تا سطح نویز ۳٪ استفاده از کاهش تکینگی ماتریس تأثیر چندانی در کاهش خطای شناسایی ندارد. هم‌چنین ضریب تغییرات برای کلیهٔ درایه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی (عناصر قطری و غیرقطری) در حالت استفاده از کاهش تکینگی ماتریس نسبت به حالت عدم استفاده از آن نتایج مطلوب‌تری دارد. بنابراین از کاهش ضریب تغییرات به‌عنوان یک معیار پایداربودن پاسخ، می‌توان فهمید در سطح نویز کم (همانند ۳٪) نیز کاهش بدوضعی مسئله قابل استنباط می‌باشد. از دیگر نتایج مشاهده‌شده می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

۱) در حالت عدم استفاده از کاهش تکینگی ماتریس، میانگین خطای کلیهٔ درایه‌های ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی به‌ترتیب ۱/۷۸٪، ۰/۷۲٪ و ۱/٤۲٪ می‌باشد.

۲) در حالت استفاده از کاهش تکینگی، میانگین خطای کلیهٔ درایه‌های ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی به‌ترتیب ۱/۸۰٪، ۰/۵۷٪ و ۱/۱۳٪ می‌باشد.

۳) در حالت عدم استفاده از کاهش تکینگی، میانگین ضرایب تغییرات درایه‌های ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی به‌ترتیب ۱/۱۲٪، ۰/۳۳٪ و ۱/۱۵٪ می‌باشد.

٤) در حالت استفاده از کاهش تکینگی، میانگین ضرایب تغییرات درایه‌های ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی به‌ترتیب ۰/۹٤٪، ۰/۲۸٪ و ۱/۰۲٪ می‌باشد.

۵) به‌طور کلی در هر دو حالت دقت و قابلیت اعتماد درایه‌های غیر قطری ماتریس‌های تعیین‌شده بیشتر از عناصر قطری هستند.

٦) به‌طور کلی در هر دو حالت قابلیت اعتماد مـاتریس سختی بیش از ماتریس‌های جرم و میرایی می‌باشـد زیرا ضریب تغییرات آن کمتر است.

جدول ۱ خصوصیات تعیین‌شدهٔ ماتریس‌های میرایی و سختی در حالت عدم استفاده از روش کاهش تکینگی ماتریس با ایجاد ۳٪ نویز در پاسخ‌ها و نیروی ورودی برای حالت بارگذاری هارمونیک در یک گره از سازه (درصد خطای مقیاس‌شده و ضریب تغییرات به‌ترتیب از چپ به راست در پرانتز نشان داده شده است)

Storey	1	2	3	4	5	6	7	8
Mass of storey (ton)	69.44 (-0.8,0.1)	54.40 (-1.1,0.1)	39.60 (-1.0,0.5)	53.90 (-2.0,0.8)	39.44 (-1.4,1.4)	56.88 (-5.2,1.9)	59.04 (-1.6,2.2)	54.40 (-1.1,2.0)
Damping Matrix (KN.sec/mm) $\times 10^{-2}$	4.91 (3.0,0.7)	-3.54 (1.4,0.3)	0.10 (1.5,1.0)	-0.05 (-1.7,0.7)	-0.02 (-0.5,0.8)	-0.02 (-0.2,0.3)	0.00 (-0.2,0.4)	0.10 (1.0,0.7)
	-3.54 (1.5,0.3)	4.88 (-1.1,0.7)	-1.03 (1.5,0.7)	-0.34 (-0.4,0.6)	0.01 (0.0,0.6)	0.03 (0.5,0.6)	-0.04 (-1.2,0.7)	-0.01 (-0.3,0.7)
	0.09 (1.3,0.8)	-1.03 (-1.1,0.7)	2.13 (0.7,0.9)	-1.15 (-0.3,0.5)	0.04 (-0.5,0.8)	0.01 (0.3,1.2)	-0.05 (-1.4,1.2)	0.06 (0.9,0.8)
	-0.04 (-1.5,0.6)	-0.35 (-0.6,0.5)	-1.15 (-0.4,0.5)	2.78 (-1.1,1.0)	-1.04 (0.5,0.9)	-0.30 (1.8,1.0)	-0.04 (-1.3,1.5)	0.03 (-1.1,1.2)
	-0.01 (-0.3,0.6)	0.01 (0.0,0.5)	0.05 (-0.4,0.8)	-1.04 (0.5,0.9)	1.95 (-2.6,1.4)	-1.10 (2.9,1.0)	-0.09 (-3.6,2.1)	0.04 (0.0,1.7)
	-0.01 (-0.1,0.3)	0.03 (0.5,0.6)	0.01 (0.3,1.2)	-0.30 (1.8,1.0)	-1.01 (2.9,1.0)	3.30 (-5.1,3.9)	-2.04 (5.8,2.5)	0.26 (1.6,2.2)
	0.00 (-0.3,0.4)	-0.04 (-1.2,0.7)	-0.05 (-1.1,1.2)	-0.04 (-1.3,1.5)	-0.09 (-3.6,2.1)	-2.04 (5.8,2.5)	3.87 (-11.8,4.0)	-2.04 (0.6,3.3)
	0.10 (0.8,0.6)	-0.01 (-0.2,0.6)	0.06 (0.9,0.8)	0.03 (-1.1,1.3)	0.04 (0.0,1.7)	0.26 (1.6,2.2)	-2.04 (0.6,3.3)	1.66 (0.2,2.4)
Stiffness Matrix (KN/mm)	16.45 (-2.1,0.4)	-9.43 (1.3,0.2)	-0.17 (-0.2,0.2)	0.32 (0.2,0.1)	-0.16 (0.0,0.2)	0.15 (-0.2,0.1)	0.02 (0.2,0.1)	0.14 (0.0,0.2)
	-9.43 (1.3,0.4)	10.83 (-1.5,0.2)	0.36 (0.0,0.1)	-1.99 (0.4,0.2)	0.21 (0.0,0.2)	-0.06 (0.0,0.0)	-0.01 (0.0,0.1)	-0.03 (0.1,0.1)
	-0.17 (-0.2,0.2)	0.36 (0.0,0.1)	2.70 (-0.6,0.2)	-2.82 (0.9,0.3)	-0.40 (0.3,0.1)	0.21 (-0.3,0.1	0.05 (0.3,0.3)	0.19 (0.0,0.1)
	0.32 (0.2,0.1)	-1.99 (0.4,0.2)	-2.82 (0.9,0.3)	5.77 (-2.1,0.7)	0.48 (-0.4,0.2)	-1.71 (1.3,0.4)	-0.09 (-0.8,0.3)	-0.02 (0.1,0.1)
	-0.16 (0.0,0.2)	0.21 (0.0,0.2)	-0.40 (0.3,0.1)	0.48 (-0.4,0.2)	2.39 (-0.9,0.2)	-2.96 (1.9,0.6)	0.06 (-0.7,0.3)	0.43 (0.3,0.2)
	0.15 (-0.2,0.1)	-0.06 (0.0,0.0)	0.2 (-0.3,0.1)	-1.71 (1.3,0.4)	-2.96 (1.9,0.6)	8.54 (-6.1,1.7)	-4.28 (2.9,0.9)	0.07 (-0.4,0.3)
	0.02 (0.2,0.1)	-0.01 (0.0,0.1)	0.05 (0.3,0.2)	-0.09 (-0.8,0.3)	0.06 (-0.7,0.3)	-4.28 (2.9,0.9)	8.26 (-3.3,2.0)	-4.20 (1.3,0.9)
	0.14 (0.0,0.2)	-0.03 (0.1,0.1)	0.20 (0.1,0.1)	-0.02 (0.1,0.1)	0.43 (0.3,0.2)	0.07 (-0.4,0.3)	-4.02 (1.3,0.9)	3.32 (-0.4,0.9)

جدول ۲ خصوصیات تعیین شدهٔ ماتریس‌های میرایی و سختی در حالت استفاده از کاهش تکینگی ماتریس با ایجاد ۳٪ نویز در پاسخ‌ها و نیروی ورودی برای حالت بارگذاری هارمونیک در یک گره از سازه (درصد خطای مقیاس‌شده و ضریب تغییرات به‌ترتیب از چپ به راست در پرانتز نشان داده شده است)

Storey	1	2	3	4	5	6	7	8
Mass of storey (ton)	69.44 (-0.8,0.1)	54.37 (-1.2,0.1)	39.54 (-1.0,0.4)	54.01 (-2.0,0.8)	39.36 (-1.4,0.1)	56.86 (-5.2,1.9)	59.02 (-1.6,2.1)	54.34 (-1.2,2.0)
Damping Matrix (KN.sec/mm) $\times 10^{-2}$	4.90 (3.0,0.6)	-3.56 (0.9,0.3)	0.06 (0.8,0.1)	-0.03 (-1.4,0.7)	-0.02 (-0.5,0.7)	-0.02 (-0.2,0.3)	0.00 (0.0,0.4)	0.09 (1.0,0.7)
	-3.56 (1.5,0.3)	4.90 (-1.0,0.7)	-1.04 (1.2,0.1)	-0.34 (-0.3,0.6)	0.01 (0.0,0.6)	0.01 (0.2,0.6)	-0.03 (-1.2,0.6)	-0.01 (-0.3,0.7)
	0.06 (0.9,0.8)	-1.04 (-1.8,0.5)	2.13 (-0.7,0.9)	-1.15 (-0.3,0.5)	0.04 (-0.5,0.8)	0.01 (0.3,1.2)	-0.05 (-1.6,1.0)	0.03 (0.3,0.8)
	-0.03 (-1.2,0.6)	-0.34 (-0.3,0.5)	-1.15 (-0.3,0.5)	2.78 (-1.1,1.0)	-1.07 (0.2,0.8)	-0.34 (1.4,0.8)	-0.06 (-1.5,1.2)	0.03 (-1.1,1.1)
	-0.01 (-0.3,0.6)	0.01 (0.0,0.5)	0.05 (-0.4,0.8)	-1.07 (0.1,0.9)	1.94 (-2.8,1.0)	-1.06 (1.0,1.1)	-0.07 (-3.4,2.1)	0.02 (-0.4,1.1)
	-0.01 (-0.1,0.3)	0.01 (0.1,0.6)	-0.02 (-0.5,1.2)	-0.34 (0.5,1.0)	-1.06 (1.0,0.9)	3.28 (-5.2,3.0)	-2.16 (2.4,2.4)	0.18 (-0.8,2.1)
	0.00 (-0.1,0.4)	-0.03 (-1.1,0.7)	-0.05 (-1.4,1.2)	-0.04 (-1.3,1.5)	-0.09 (-3.9,2.0)	-2.16 (2.4,2.2)	3.9 (-10.7,3.5)	-2.08 (-0.6,3.1)
	0.09 (0.7,0.3)	-0.02 (-0.4,0.5)	0.04 (0.4,0.4)	0.02 (-1.1,0.3)	0.03 (-0.0,1.5)	0.24 (-1.2,2.2)	-2.11 (-0.6,3.1)	1.57 (-0.3,1.9)
Stiffness Matrix (KN/mm)	16.46 (-2.1,0.4)	-9.47 (0.7,0.1)	-0.17 (-0.1,0.2)	0.32 (0.1,0.1)	-0.16 (0.0,0.1)	0.15 (0.0,0.1)	0.02 (0.2,0.1)	0.14 (0.0,0.2)
	-9.47 (0.8,0.1)	10.87 (-1.4,0.2)	0.36 (0.0,0.1)	-1.99 (0.3,0.3)	0.21 (0.0,0.2)	-0.06 (0.0,0.0)	0.01 (0.0,0.0)	-0.03 (0.1,0.1)
	-0.17 (-0.1,0.2)	0.36 (0.0,0.1)	2.70 (-0.6,0.1)	-2.83 (0.8,0.3)	-0.40 (0.2,0.1)	0.22 (-0.2,0.1)	0.05 (0.3,0.2)	0.19 (0.1,0.1)
	0.32 (0.1,0.2)	-1.99 (0.3,0.3)	-2.83 (0.8,0.3)	5.80 (-2.0,0.6)	0.49 (-0.3,0.2)	-1.73 (-0.9,0.5)	-0.06 (-0.5, 0.3)	-0.02 (0.1,0.1)
	-0.16 (0.0,0.2)	0.21 (0.0,0.1)	-0.40 (0.2,0.1)	0.49 (-0.3,0.2)	2.40 (-0.8,0.1)	-2.98 (1.6,1.0)	0.07 (-0.4,0.3)	0.42 (0. 2,0.1)
	0.15 (0.0,0.1)	-0.06 (0.0,0.0)	0.22 (-0.2,0.1)	-1.73 (1.0,0.3)	-2.98 (1.6,0.4)	8.63 (-5.9,1.6)	-4.32 (2.3,1)	0.09 (-0.1,0.2)
	0.02 (0.2,0.1)	0.00 (0.0,0.0)	0.05 (0.3,0.2)	-0.06 (-0.5,0.3)	0.08 (-0.4,0.3)	-4.33 (2.3,0.8)	8.32 (-3.0, 1.6)	-4.03 (1.1,0.7)
	0.14 (0.0, 0.2)	-0.03 (0.1,0.1)	0.19 (0.1,0.1)	-0.02 (0.1, 0.1)	0.42 (0.2,0.8)	0.09 (-0.1,0.2)	-4.03 (1.1,0.8)	3.33 (-0.4,0.8)

نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از اندازه‌گیری پاسخ سازه در درجات آزادی سازه تحت یک تحریک اجباری و کاهش تکینگی ماتریس‌های حاصل از پاسخ‌ها،

ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم خطی (شامل ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی) بااستفاده از حل معکوس معادلات حرکت در حوزهٔ فرکانس در روند شناسایی سیستم به روش به‌روزرسانی مدل تعیین گردیده‌اند. اگر پاسخ‌های سازه بدون نویز باشند، ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم خطی به‌صورت دقیق تعیین می‌گردند، ولی در حالت پاسخ‌های نویزدار، بهینه‌ترین مقادیر ماتریس‌های خصوصیات سازه، بااستفاده از حذف تکینگی ماتریس‌های پاسخ، روش حداقل مربعات و کمینه نمودن مجموع نیروهای ماندگار معادلات حرکت در همهٔ درجات آزادی و همهٔ نقاط فرکانسی منتخب تعیین می‌گردند. در روش مذکور از کاهش تکینگی قسمت حقیقی ماتریس تبدیل فوریه شتاب سازه، تحت یک تحریک اجباری در حل معکوس معادلات حرکت استفاده شده است.

به‌منظور بهبود بخشیدن حساسیت روش به‌میزان نویز، فرم جبری مسئله مورد بازبینی و بررسی قرار گرفته است و الگوریتمی پیشنهاد گردیده است که قادر به کاهش عدد وضعیت ماتریس نگاشت به‌کمک حذف تکینگی‌های این ماتریس می‌باشد. به‌منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی در تعیین ماتریس‌های خصوصیات سیستم، قاب هشت‌طبقهٔ غیربرشی انتخاب شده است. در حالت کلی نشان داده شد روش کاهش تکینگی ماتریس، با کاهش عدد وضعیت ماتریس پاسخ دقت خصوصیات تعیین شده را بهبود می‌بخشد، این قابلیت با افزایش سطح نویز نمایان‌تر می‌شود و می‌توان به‌کمک آن شناسایی‌های با برداشت‌های پراختلال را به‌نحو مطلوب‌تر انجام داد. درپایان به‌منظور بررسی آماری نتایج، دو معیار پذیرفته‌شدهٔ میانگین خطا و ضریب تغییرات در یک سطح نویز نسبتاً کم، برای کلیهٔ درایه‌های ماتریس‌های مشخصهٔ سیستم مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و نشان داده شد استفاده از کاهش تکینگی ماتریس می‌تواند در پایدارسازی پاسخ و کاهش خطا در روند شناسایی سیستم عملکرد مناسبی داشته باشد.

مراجع

1. Morrasi,A., Vestroni,F.,"Dynamic Methods for Damage Detection in Structures, Springerwien", New York, (2008).
2. Isakov,Victor., "Inverse Problems For Partioal Differential Equations", Springer Science & Business Media, (1998).
3. Hanse,P.C., "Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems", Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1998).
4. Rump, S.M., "Approximate inverses of almost singular matrices still contain useful information", Technical Report 90.1, Faculty for Information and Communication Sciences, Hamburg University of Technology, (1990).
5. Rump,S.M., "A class of arbitrarily ill-conditioned floating-point matrices", *SIAM J. Matrix Anal.* Appl., Vol. 12 (4), pp. 645–653, (1991).
6. Ogita,T., Rump,S.M., Oishi,S., "Accurate sum and dot product", *SIAM J. Sci. Comput,*. Vol. 26(6), pp. 1955–1988, (2005).
7. Ohta,T., Ogita,T., Rump,S.M., Oishi,S., "Numerical verification method for arbitrarily ill-conditioned

linear systems", *Trans. JSIAM*, Vol. 15(3), pp. 269–287 (in Japanese), (2005).

8. Rump,S.M., Ogita,T., Oishi, S., "Accurate floating-point summation", 41 pages, 2006, submitted for publication, preprint is available from http://www.ti3.tu-harburg.de/publications/rump. Technical Report 05.12, Faculty for Information and Communication Sciences, Hamburg University of Technology, (2005).
9. Ohta,T., Ogita,T., Rump, S.M., Oishi, S., "Numerical verification method for arbitrarily ill-conditioned linear systems", Trans. *JSIAM*, Vol. 15 (3), pp. 269–287, (in Japanese),(2005).
10. Moszynski,K., "On solving linear algebraic equations with an ill-conditioned matrix", Appl. Math., Vol. 22 (4), pp. 499-513, (1995).
11. Strand,O., "Theory and methods related to the singular-function expansion and LandweberÕsiteration for integral equations of the first kind", *SIAM. J. Numer.* Anal., Vol. 11 (4), pp. 798-824, (1974).
12. Lu,M.,Liu,K., "Parallel algorithm for Householder transformation with applications to illconditioned problem", *Int. J. Comput.* Math., Vol. 64, pp. 89-101, (1997).
13. Golub,G.H.,and Kahan.,"Calculating the singular value and pseudo-inverse of a matrix”, *SIAM J*. Num. Anal. Vol. 2, pp. 205-224, (1965).
14. Businger,P.A., and Golub,G.H.,"Linear least squares solution by Householder transformation", (1965).
15. Golub,G.H., and Reinsch, C.,"Singular value decomposition and least squares solution", Numer. Math., Vol. 14 pp. 403-420, (1970).
16. Chan,T.F.,"An improved algorithm for computing the singular value decomposition" .ACM Trans., Vol. 8(1), pp. 72-83, (1982).
17. Demmel,J., and Kahan, W.,"Accurate singular value of bidiagonal matrices”, *SIAM J*. Sci. and Stat. Comput., Vol. 11(5), pp. 873-912, (1990).
18. Fernando,K.V., andParlet, B.N.,"Accurate singular and differential qd algorithms", *Numerische Mathematik*, Vol. 67(2), pp. 191-229, (1994).
19. Hansen., "A numerical method for solving Fredholm integral equations of the first kind using singular values",*SIAM J*. Numcr. Anal., Vol. 8(3), pp. 616-622, (1971).
20. Varah,J.M., "On the numerical solution of ill-conditioned linear systems with applications to ill-posed problems", *SIAM J.* Numcr. Anal., Vol. 10(2), pp. 257-267,(1973).
21. Varah,J.M., "A practical examination of some numerical methods for linear discrete ill-posed problems", SIAM Review, Vol. 21(1), pp. 100-111, (1979).
22. Hansen, P. C.,"Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve". SIAM Review, Vol. 34(4), pp. 561–80, (1992).
23. Hansen, P. C., O’Leary DP. "The use of the L-curve in the regularizationof discrete ill-posed

problems". *SIAM J Sci. Compute* Vol. 14, pp. 1487–503, (1993).

24. Volokh,K. Y.,and Vilnay,O.,"Pin-pointing solution of ill-conditioned square systems of linear equations", Appl. Math. Lett. Vol. 13(7), pp. 119-124, (2000).
25. Tikhonov,A.N., "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method,Dokl. Akad. Nauk", SSSR 151(1963), 501-504, Soviet Math. Dokl. 4, pp. 1035-1038, (1963).
26. Leclere, Q., Pezerat, C., Laulagnet, B., Polac, L.,"Indirect measurement of main bearing loads in an operating dieselengine",*Journal of Sound and Vibration,* Vol. 286(1) pp. 341–361, (2005).
27. Nordberg, T.P., Gustafsson, I.,"Dynamic regularisation of input estimation problems by explicit block inversion", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195(44), pp. 5877–5890, (2006).
28. Dicken, V., Menz, I., Maass, P., Niebsch, J., Ramlau, R.,"Inverse imbalance reconstruction for nonlinearly damped systems", Inverse Problems in Science and Engineering 2005, Vol. 13(5), pp. 507–543, (2005).
29. Yu, E., Taciroglu, E., and Wallace, J.W.,"Parameter Identification of Framed Structures using an Improved Finite Element Model-updating Method", Earthquake Engng Struct. Dyn. 36, pp. 619-639, (2007).
30. Titurus, B., and Friswell, M.I.,"Regularization in Model Updating",*Int. J. Numer. Meth.* Engng., Vol.75(4), pp. 440-478, (2008).
31. Ghafori–Ashtiany,M., and Ghasemi,M.,"System Identification Method by Using Inverse Solution of Equations of Motion in Frequency Domain",*Journal of vibration and control,* Vol. 19(11), pp. 1633-1645, (2012).